
MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION

Integrieren kann man wirklich nicht genug üben. Hier beschäftigen wir uns auch mit Integralen, in denen vektorwertige Größen auftreten.

[P26] *Der Tag, an dem die Erde stillstand*

Der Filmklassiker von 1951 mit obigem Titel und seine weniger gute Neuverfilmung aus dem Jahre 2008 bringen den Aufgabensteller auf folgende perfide Idee: Eine uns technisch sehr weit überlegene Zivilisation ist mit unserem Betragen dermaßen unzufrieden, dass sie kurzerhand die Erde zum Stillstand bringt. Gemeint ist, dass unsere Erde aufhört, sich um die Sonne zu drehen. Sie fängt dann an, sich in direkter Linie auf die Sonne hin zu bewegen.

(a) Wie viele Tage bleiben uns noch bis zum Untergang in die Sonne? Nutzen Sie den Energiesatz für eine ein-dimensionale Bewegung. Die Anfangsbedingungen sind: $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = 0$ mit den Zahlwerten $r_0 \approx 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, $M_{\text{Sonne}} \approx 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ und $G_N \approx 6.7 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2\mathrm{kg}}$. Das Potential ist natürlich das Newtonsche Gravitationspotential.
Hinweise: Das Integral für die Berechnung der Periode kann mit Bleistift und Papier ausgerechnet werden. Dabei ist die Substitution $r = r_0 \sin^2 y$ sehr hilfreich.

(b) Wie kann man das Ergebnis stattdessen mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes $T^2/r_0^3 = \text{const}$ und der Dauer eines Jahres herleiten? Das dritte Keplersche Gesetz besagt, dass die Quadrate der Umlaufzeiten T proportional zu den Kuben der großen Halbachsen r_0 der (im allgemeinen elliptischen) Bahnen sind.

(c) Schätzen Sie die Energie ab, die freigesetzt werden muss, um die Erde zum Stillstand zu bringen. Es ist $M_{\text{Erde}} \approx 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Zum Vergleich: Die Sonne setzt pro Sekunde etwa $3.9 \cdot 10^{26}$ J an Energie frei, und etwa $3.9 \cdot 10^{24}$ J an Energie der Sonne landet pro Jahr auf der Erdoberfläche.

[P27] *Wegintegral*

Ein kreisförmiger Draht $\mathcal{C}$ mit Radius R und Zentrum im Ursprung ist einem elektrischen Wirbelfeld $\vec{E}(\vec{r}) \doteq \alpha\,(-y, x)^\intercal$ ausgesetzt (dies ist ein zwei-dimensionales Problem). Berechnen Sie die Ringspannung $U = \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ entlang $\mathcal{C}$ wie folgt.

(a) Skizzieren Sie den Draht und das elektrische Feld in der Ebene.
(b) Parametrisieren Sie die Kurve $\mathcal{C}$ als $\vec{r}(t) \doteq \ldots$ und geben Sie $\dot{\vec{r}}(t)$ an.
(c) Legen Sie die Randwerte fest: $\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_1) \doteq R\,(1, 0)^\intercal$.
(d) Schreiben Sie U als ein Integral über die Parametrisierung t, also $U = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \cdot \vec{E}(\vec{r}(t))$, und berechnen Sie es.
(e) Nutzen Sie die Kenntnis $\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{r}$, um die Rechnung abzukürzen.
(f) Was ergibt sich analog für das Integral $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r})$?